

# Математическая модель оценки влияния функционального состояния системы связи на непрерывность управления авиационным формированием

С.С. Белоусов <sup>1</sup>, e-mail: belousovtel@yandex.ru

1 ВУНЦ ВВС «ВВА» им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

**Аннотация.** В данной статье предложена математическая модель оценки влияния функционального состояния системы связи на вероятность непрерывности управления авиационным формированием, основанная на анализе среднего времени исправности и простоя требуемого ресурса связи пункта управления.

**Ключевые слова:** модель, функция, система связи, граф, вероятность непрерывности.

## Введение

Рассматривая вопросы моделирования процесса управления [1,2] рассмотрим граф перехода системы  $S$  из управляемого состояния  $S_y$  в неуправляемое состояние  $S_n$  который имеет вид, представленный на рисунке1:

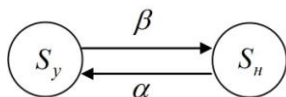


Рис. 1. Граф перехода системы из управляемого состояния в неуправляемое

Здесь  $\beta = 1/T_n$  – интенсивность потери управленческих функций органом управления;  $\alpha = 1/T_{np}$  – интенсивность восстановления управленческих функций;  $T_n$  – среднее время между интервалами потери управления;  $T_{np}$  – среднее время восстановления управленческих функций [3,4].

Вероятность состояния  $S_y$  в момент времени  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T_l$ , описывается функцией вероятности непрерывности управления  $P_{ny}(t)$ , а вероятность состояния  $S_n$  в момент времени  $t$  описывается функцией вероятности потери управления  $P_{ny}(t) = 1 - P_{ny}(t)$ . Поэтому вероятность  $P(t)$  того, что система в каждый момент времени обеспечивает непрерывность управления, с учетом вида графа может быть получена путем интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} P_{ny}(t) = P'_{ny}(t) = -\beta P_{ny}(t) + \alpha (1 - P_{ny}(t)) \quad (1)$$

С начальным условием  $P(t) = 1$  получим решение

$$P_{ny}(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} e^{-(\alpha + \beta)(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (2)$$

Заметим, что функция  $P_{ny}(t)$  убывающая и характеризует потерю непрерывности управления. Типичный график функции  $P_{ny}(t)$  представлен на рисунке 2:

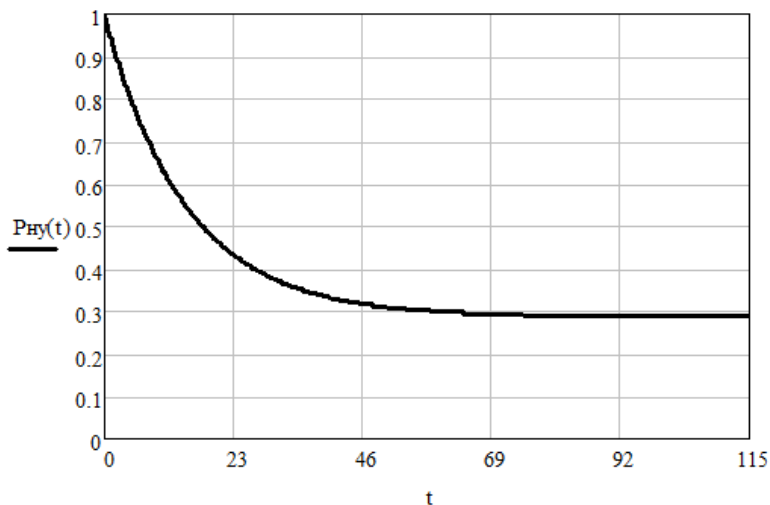


Рис. 2. График функции  $P_{ny}(t)$  непрерывности управления

Система управления  $S$  состоит из  $N$  пунктов управления (ПУ). Определим состояния системы:

$S_0$  – все ПУ функционируют,

$S_k$  –  $k$  ПУ прекратили функционирование,  $1 \leq k \leq N$ .

Детализируем граф на рисунке 1. с учетом всех ПУ:

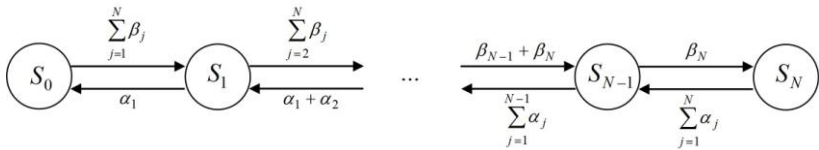


Рис. 3. Граф функциональных состояний системы связи в результате потери управляющих функций

Здесь  $\beta_k$  – интенсивность перехода системы из состояния  $S_k$  в состояние  $S_{k+1}$ ,  $\alpha_k$  – интенсивность перехода системы из состояния  $S_k$  в состояние  $S_{k-1}$ . Интенсивности  $\beta_k$  характеризуют процесс потери управляющих функций, интенсивности  $\alpha_k$  характеризуют процесс восстановления управляющих функций.

Вероятности  $P_k(t)$  состояний  $S_k$  с учетом вида графа могут быть найдены путем интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
P_0'(t) &= -\sum_{j=1}^N \beta_j P_0(t) + \alpha_1 P_1(t) \\
P_1'(t) &= -\left( \sum_{j=2}^N \beta_j + \alpha_1 \right) P_1(t) + \sum_{j=1}^N \beta_j P_0(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) P_2(t) \\
P_2'(t) &= -\left( \sum_{j=3}^N \beta_j + \alpha_1 + \alpha_2 \right) P_2(t) + \sum_{j=2}^N \beta_j P_1(t) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) P_3(t) \\
&\dots \\
P_{N-1}'(t) &= -\left( \beta_N + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \right) P_{N-1}(t) + (\beta_{N-1} + \beta_N) P_{N-2}(t) + \sum_{j=1}^N \alpha_j P_N(t) \\
P_N'(t) &= -\sum_{j=1}^N \alpha_j P_N(t) + \beta_N P_{N-1}(t) \\
P_0(t) + P_1(t) + \dots + P_N(t) &= 1
\end{aligned} \tag{3}$$

Начальные условия:  $P_0(t_0) = 1$ ,  $P_1(t_0) = P_2(t_0) = \dots = P_N(t_0) = 0$ .

Типичные графики функций  $P_k(t)$  представлены на рисунке 4:

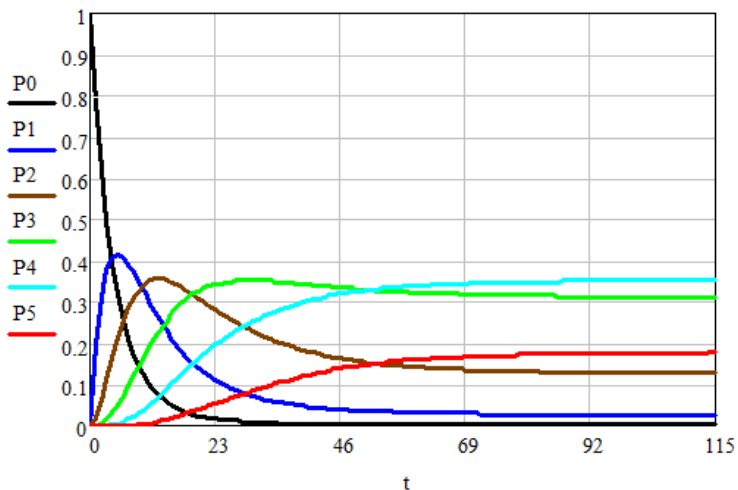


Рис. 4. Граф функциональных состояний системы связи в результате потери управляющих функций

Решение системы (3) даст функции

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}) e^{-f_i(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\})(t-t_0)} + g_k(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}) \quad (4)$$

где  $\phi_i(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}), f_i(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}), g_k(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\})$  – некоторые функции интенсивностей, участвующих в (3).

Так как все ПУ независимы друг от друга и могут функционировать в любом сочетании, то по теореме о сумме вероятностей для оценки вероятности непрерывного управления системой связи с учетом введенных состояний, связанных с прекращением функционирования ПУ, можно использовать формулу

$$\tilde{P}_{\text{н\ddot{y}}}(t) = \sum_{m=0}^N P_{m,N}(t) \quad (5)$$

где  $P_{m,N}(t)$  – вероятность того, что из  $N$  ПУ будут функционировать  $m$  ПУ. Значения  $P_{m,N}(t)$  найдем с помощью производящей функции

$$(1 - P_0(t) + P_0(t)z)(1 - P_1(t) + P_1(t)z) \dots (1 - P_N(t) + P_N(t)z) \quad (6)$$

Раскрыв скобки, получим многочлен по степеням  $z$  :

$$\prod_{k=0}^N (1 - P_k(t)) + \sum_{m=0}^{N-1} f_m(P_0(t), \dots, P_N(t)) z^m + \prod_{k=0}^N P_k(t) z^{N+1} \quad (7)$$

где  $f_m(P_0(t), \dots, P_N(t))$  – некоторые функции значений вероятностей. Тогда, согласно смыслу производящей функции,

$$P_{m,N}(t) = f_m(P_0(t), \dots, P_N(t)), m = 0, N-1, P_{N,N}(t) = \prod_{k=0}^N P_k(t) \quad (8)$$

В заключение пункта обсудим вопрос об использовании выражений функций  $P_k(t)$  (см. (4)) и им подобных (состоящих из суммы нескольких экспоненциальных функций) в аналитическом виде, с числовыми коэффициентами или в виде таблиц значений.

Использование функций  $P_k(t)$  после интегрирования в среде Mathcad в виде таблиц значений вероятностей в заданные заранее моменты времени позволяет строить графики, но не дает возможности оперировать функциями математически.

При  $N \geq 5$  результат решения системы уравнений после преобразования Лапласа (как промежуточного этапа в решении системы (3)) в среде Mathcad становится либо необычайно громоздким, либо невозможным. Из-за этого выражения (4) становятся также крайне громоздкими, состоящими из  $N+1$  слагаемого с коэффициентами относительно интенсивностей, имеющими сложный вид. Как следствие этого, получение функций вида (5) превращается в непреодолимую проблему.

Использование функций  $P_k(t)$  с числовыми коэффициентами (получающимися после задания значений интенсивностей) также приводит в выражении (5) к громоздким суммам.

Выходом из положения является аппроксимация функций, заданных таблицами своих значений, или сложного аналитического вида функций более простыми функциями с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Значение коэффициента корреляции по критерию Пирсона позволит оценить качество аппроксимации.

Пусть, например, имеем функции с числовыми коэффициентами

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 0.247 \cdot e^{-0.0525 \cdot t} + 0.4 \cdot e^{-0.0275 \cdot t} + 0.21 \cdot e^{-0.0752 \cdot t} + 0.117 \\ p_2(t) &= -0.127 \cdot e^{-0.0525 \cdot t} + 0.219 \cdot e^{-0.0274 \cdot t} - 0.284 \cdot e^{-0.0751 \cdot t} + 0.192 \quad (9) \\ p_3(t) &= -0.299 \cdot e^{-0.0526 \cdot t} + 0.0814 \cdot e^{-0.0274 \cdot t} + 0.000672 \cdot e^{-0.0751 \cdot t} + 0.381 \end{aligned}$$

Найдем интерполирующую функцию для функции  $p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$ . Будем искать ее в виде  $F(t) = r_0 e^{-r_1 \cdot t} + r_2$ . Очевидно, такая функция значительно удобнее для использования.

С помощью МНК получены значения коэффициентов  $r_0 = 0.384$ ,  $r_1 = 0.016$ ,  $r_2 = 0.641$  и интерполирующая функция  $F(t) = 0.384 \cdot e^{-0.016 \cdot t} + 0.641$  со значением коэффициента корреляции 0.998. Графики обеих функций представлены на рисунке 5:

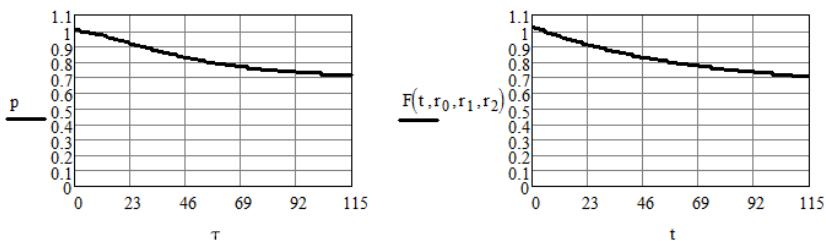


Рис. 5. Графики функций  $p(t)$  (слева) и  $F(t)$  (справа)

Теперь проинтерполируем функцию (5). Типичный график функции (5) представлен на рисунке 6:

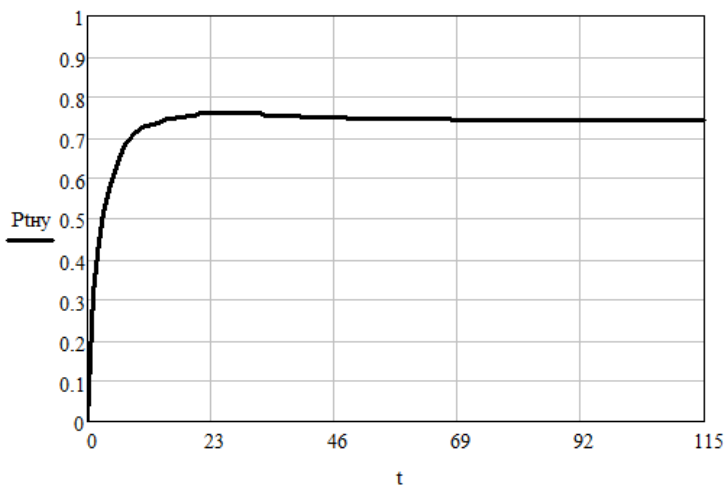


Рис. 6. График функции  $\tilde{P}_{\text{ны}}(t)$

Согласно виду  $\tilde{P}_{\text{ны}}(t)$ , в качестве интерполирующей выберем функцию  $F(t) = r_0(1 - e^{-t}) + r_1\sqrt{t} + r_2t$ . Метод наименьших квадратов дает решение  $F(t) = 0.553(1 - e^{-t}) + 0.062\sqrt{t} - 0.004158t$  с корреляцией 0.966. График функции  $F(t)$  представлен на рисунке 7:



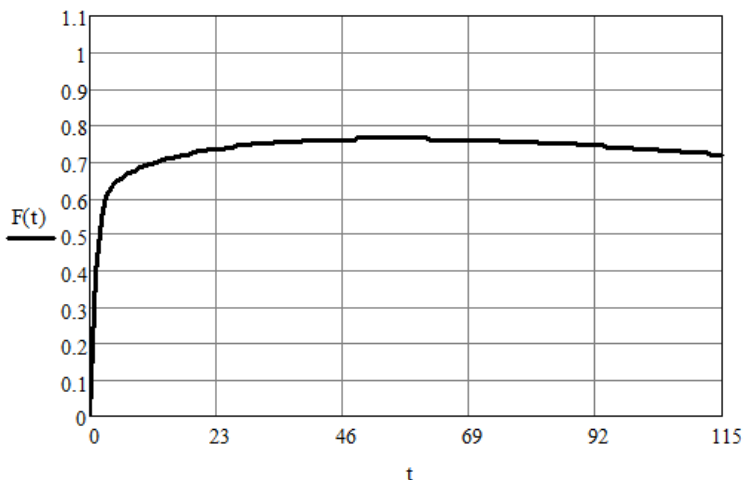


Рис. 7. График интерполирующей функции  $F(t)$

Таким образом, предложенная математическая модель оценки влияния функционального состояния системы связи на вероятность непрерывности управления авиационным формированием, основанная на анализе среднего времени исправности и простоя требуемого ресурса связи пункта управления позволяет прогнозировать возможные потери управления воздушными судами с наземного пункта управления для принятия своевременных мер по их недопущению.

#### Список литературы

1. Алтухов П. К., Основы теории управления войсками / И. А. Афонский, И. В. Рыболовский, А. Е. Татарченко; Под ред. П. К. Алтухова. – М. : Воениздат, 1984. – 221 с.
2. Боговик А. В., Теория управления в системах военного назначения: учебник./ А.В. Боговик, В.В. Игнатов – СПб.: ВАС. 2008. – 460 с.
3. Белоусов, С. С., Проведение исследований непрерывности управления авиационным формированием с использованием средств компьютерного моделирования / С. С Белоусов, П. А. Федюнин, С. П. Юрченко // сб. мат. XXI Международной конференции «Информатика: проблемы, методы, технологии» (IPMT-2021) (Воронеж, 11–12 февраля 2021 г.). – Воронеж, 2021. – С. 1623-1627.
4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669806 от 02.12.2021 г Программа для расчёта среднего

времени исправности и простоя требуемого ресурса связи пункта управления. / Белоусов С.С.; заявитель и правообладатель Белоусов С. С., заявка №. 2021668807; в реестре программ для ЭВМ 02.12.21.

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669722 от 02.12.2021 г Программа для расчёта показателя вероятности непрерывности управления с пункта управления / Белоусов С.С.; заявитель и правообладатель Белоусов С. С., заявка №. 2021668819; в реестре программ для ЭВМ 02.12.21.